解析学 1　解答例

2017.11.24

■　n は $n \geq 2$ をみたす自然数とする．任意の複素数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，y_1，y_2，$\cdots$，y_n に対して

$$\sum_{j=1}^{n} |\,x_j\,|\,|\,y_j\,| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\,x_j\,|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\,y_j\,|^2}$$

が成り立つことを示せ．

（解）　複素ベクトル $\mathbf{v} = (v_j)$ の大きさ $\|\,\mathbf{v}\,\|$，複素ベクトル $\mathbf{v} = (v_j)$ と $\mathbf{w} = (w_j)$ の内積 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ を

$$\|\,\mathbf{v}\,\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\,v_j\,|^2}, \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} \overline{v_j}\,w_j$$

により定義すると，$\|\,\mathbf{v}\,\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ が成り立つ．第 j 要素が $|\,x_j\,|$，$|\,y_j\,|$ であるベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ とすると，

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\,\mathbf{x}\,\|\,\|\,\mathbf{y}\,\|$$

を示せばよい．また，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \geq 0$，$\|\,\mathbf{x}\,\| \geq 0$，$\|\,\mathbf{y}\,\| \geq 0$ であることにも注意したい．

　まず，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ または $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ のときには，$\|\,\mathbf{x}\,\| = 0$ または $\|\,\mathbf{y}\,\| = 0$ であり，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ が得られるので，示すべき不等式が成り立つ．

　次に，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ の場合，つまり，$\|\,\mathbf{x}\,\| > 0$ かつ $\|\,\mathbf{y}\,\| > 0$ の場合について考える．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}\,\|^2 &= (\mathbf{x} + t\,\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\,t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + t^2\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = \|\,\mathbf{x}\,\|^2 + 2\,t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + t^2\,\|\,\mathbf{y}\,\|^2 \end{aligned}$$

であるから，

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 - \|\,\mathbf{x}\,\|^2\,\|\,\mathbf{y}\,\|^2 \leq 0, \qquad \text{つまり，} \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\,\mathbf{x}\,\|\,\|\,\mathbf{y}\,\|$$

が成り立つ．

　以上から，任意の複素数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，y_1，y_2，$\cdots$，y_n に対して，示すべき不等式が成り立つ．■