解析学１　解答例

2017.10.27

■　各 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \frac{|\,x - y\,|}{1 + |\,x - y\,|}$$

により定義するとき，$d(x, y)$ は $\mathbb{R}$ における距離であることを示せ．

(解)　関数

$$f(z) = \frac{z}{1 + z} \quad (z \geq 0)$$

はすべての $z \geq 0$ に対して $f(z) \geq 0$ をみたす狭義の単調増加関数であり，また，$d(x, y) = f(|\,x - y\,|)$ と表せることに注意したい．(1) すべての x，$y \in \mathbb{R}$ に対して $|\,x - y\,| \geq 0$ より $d(x, y) \geq 0$ である．また，

$$0 = d(x, y) = f(|\,x - y\,|) \iff |\,x - y\,| = 0 \iff x = y$$

が成り立つ．(2) $|\,z\,| = |\,-z\,|$ より，すべての x，$y \in \mathbb{R}$ に対して

$$d(x, y) = f(|\,x - y\,|) = f(|\,-(y - x)\,|) = f(|\,y - x\,|) = d(y, x)$$

が成り立つ．(3) すべての x，y，$z \in \mathbb{R}$ に対して，三角不等式 $|\,x - z\,| \leq |\,x - y\,| + |\,y - z\,|$ と $f(z)$ の単調性により，

$$\begin{aligned} d(x, z) =& f(|\,x - z\,|) \leq f(|\,x - y\,| + |\,y - z\,|) = \frac{|\,x - y\,| + |\,y - z\,|}{1 + |\,x - y\,| + |\,y - z\,|} \\ =& \frac{|\,x - y\,|}{1 + |\,x - y\,| + |\,y - z\,|} + \frac{|\,y - z\,|}{1 + |\,x - y\,| + |\,y - z\,|} \\ \leq& \frac{|\,x - y\,|}{1 + |\,x - y\,|} + \frac{|\,y - z\,|}{1 + |\,y - z\,|} = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

が成り立つ．以上から，$d(x, y)$ は $\mathbb{R}$ における距離である．■