解析学１　解答例

2017.10.20

■　行列

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

を対角化せよ．

(解)　行列 A:　特性方程式は

$$0=\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda+2)^2-1$$

となるので，固有値は $\lambda=-1$ と $\lambda=-3$ である．A の任意の固有値 λ に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}=(v_1,v_2)^T$ とすると，

$$\mathbf{0}=(A-\lambda E)\,\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-(2+\lambda)\,v_1+v_2\\ v_1-(2+\lambda)\,v_2\end{pmatrix}$$

より $\mathbf{v}=(1,2+\lambda)^T$ とおいてよいので，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

とおくことにより

$$\begin{aligned}P^{-1}AP=&\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ =&\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．

行列 B:　特性方程式は

$$\begin{aligned}0=\det(B-\lambda E)=&\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\ =&-(\lambda+2)^3+2\,(\lambda+2)=-(\lambda+2)\,\{(\lambda+2)^2-2\}\end{aligned}$$

となるので，B の固有値は $\lambda=-2$，$\lambda=-2\pm\sqrt{2}$ である．B の任意の固有値 λ に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)^T$ とすると，

$$\mathbf{0}=(B-\lambda E)\,\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-(2+\lambda)\,v_1+v_2\\ v_1-(2+\lambda)\,v_2+v_3\\ v_2-(2+\lambda)\,v_3\end{pmatrix}$$

より，$\lambda=-2$ のとき $\mathbf{v}=(1,0,-1)^T$，$\lambda\neq-2$ のとき $\mathbf{v}=(1,2+\lambda,1)^T$ とおいてよいので，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

とおく．P の余因子行列を用いて，P の逆行列を求めると，

$$P^{-1} = \frac{1}{-4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{aligned} P^{-1}AP =& \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ 0 & 2+2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 2 & -2-\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8-4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -8+4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．■