解析学１　解答例

2017.10.13

■　行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_\pm$ （$\mathrm{Re}\,\lambda_- \leq \mathrm{Re}\,\lambda_+$）とし，対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_\pm$ する．ただし，a，b，c は実数であり，$b^2 - a\,c \neq 0$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) λ_- と λ_+ はともに実数であることを示せ．

(2) $\lambda_- \neq \lambda_+$ とするとき，$\mathbf{v}_-$ と $\mathbf{v}_+$ は直交することを示せ．

（解） (1):　特性方程式は

$$0 = \det(A - \lambda\,E) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - a)\,(\lambda - c) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\,\lambda + a\,c - b^2$$

であるから，

$$(a+c)^2 - 4\,(a\,c - b^2) = (a-c)^2 + 4\,b^2 \geq 0$$

より A のすべての固有値は実数である．

(2):　(a) $b = 0$ のときを考える．このとき，A の固有値は a，c であり，対応する固有ベクトルは $\mathbf{v}_- = (1,0)^T$，$\mathbf{v}_+ = (0,1)^T$ であるから，$\mathbf{v}_- \cdot \mathbf{v}_+ = 0$ となり，$\mathbf{v}_-$ と $\mathbf{v}_+$ は直交する．(b) $b \neq 0$ のときを考える．$\mathbf{v}_\pm = (v_1^\pm, v_2^\pm)^T$ は $(A - \lambda_\pm\,E)\,\mathbf{v}_\pm = \mathbf{0}$ より

$$(a - \lambda_\pm)\,v_1^\pm + b\,v_2^\pm = 0, \qquad b\,v_1^\pm + (c - \lambda_\pm)\,v_2^\pm = 0$$

をみたすので，$\mathbf{v}_\pm = (b, a - \lambda_\pm)^T$ と表すことができる．解と係数の関係より

$$\lambda_- + \lambda_+ = a + c, \qquad \lambda_-\,\lambda_+ = a\,c - b^2$$

であるから，

$$\mathbf{v}_- \cdot \mathbf{v}_+ = b^2 + (a - \lambda_-)\,(a - \lambda_+) = b^2 + a^2 - (\lambda_- + \lambda_+)\,a + \lambda_-\,\lambda_+ = 0$$

が得られ，$\mathbf{v}_-$ と $\mathbf{v}_+$ は直交する．■