解析学１　解答例

2017.10.06

■　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(解)　行列 A の固有値は，方程式

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda(\lambda - 3)$$

の解であるから，$\lambda = 0$，$\lambda = 3$ である．A の任意の固有値を λ，対応する固有ベクトルを $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ とするとき，

$$\mathbf{0} = (A - \lambda E)\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\,v_1 + v_2 \\ 2\,v_1 + (2-\lambda)\,v_2 \end{pmatrix}$$

より $\mathbf{v} = (1, \lambda - 1)^T$ と取ることができるので，$\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルは $\mathbf{v} = (1, -1)^T$，$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは $\mathbf{v} = (1, 2)^T$ である．また，行列 B の固有値は，方程式

$$0 = \det(B - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left\{(2-\lambda)^2 - 2\right\}$$

の解であるから，$\lambda = 2$, $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ である．B の任意の固有値を λ, 対応する固有ベクトルを $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ とするとき，

$$\mathbf{0} = (B - \lambda E)\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\lambda)\,v_1 + v_2 \\ v_1 + (2-\lambda)\,v_2 + v_3 \\ v_2 + (2-\lambda)\,v_3 \end{pmatrix}$$

より，$\lambda = 2$ の場合には $\mathbf{v} = (1, 0, -1)^T$，$\lambda \neq 2$ の場合には $\mathbf{v} = (1, \lambda - 2, 1)^T$ と取ることができるので，$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\mathbf{v} = (1, 0, -1)^T$，$\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ に対応する固有ベクトルは $\mathbf{v} = (1, \pm\sqrt{2}, 1)^T$ である．■