解析学１　解答例

2017.01.24

■　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin n\,x\,\sin m\,x\,dx \qquad (n,\ m \in \mathbb{N})$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\,a\,\sin x + b\,\cos x\,|\,dx \qquad (a,\ b \in \mathbb{R})$

（解） (1) 三角関数の積和公式より

$$\sin n\,x\,\sin m\,x = \frac{\cos(n-m)\,x - \cos(n+m)\,x}{2}$$

であることに注意すると，$n = m$ のとき

$$\int_0^{\pi} \sin n\,x\,\sin m\,x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\,n\,x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\,n\,x}{4\,n}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

であり，$n \neq m$ のとき

$$\int_0^{\pi} \sin n\,x\,\sin m\,x\,dx = \left[\frac{\sin(n-m)\,x}{2\,(n-m)} - \frac{\sin(n+m)\,x}{2\,(n+m)}\right]_0^{\pi} = 0$$

である．(2) 三角関数の合成により，ある $m \in \{\,-1, 1\,\}$，$\theta \in [0, \pi)$ を用いて，

$$a\,\sin x + b\,\cos x = m\,\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\theta)$$

と表せるので，

$$\int_0^{\pi} |\,a\,\sin x + b\,\cos x\,|\,dx = \sqrt{a^2+b^2}\,\int_0^{\pi} |\,\sin(x+\theta)\,|\,dx$$

となる．変数変換 $t = x + \theta$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\,\sin(x+\theta)\,|\,dx = \int_{\theta}^{\pi+\theta} |\,\sin t\,|\,dt &= \int_{\theta}^{\pi} \sin t\,dt + \int_{\pi}^{\pi+\theta} (-\sin t)\,dt \\ &= [-\cos t]_{\theta}^{\pi} + [\cos t]_{\pi}^{\pi+\theta} = 2 + \cos\theta + \cos(\pi+\theta) = 2\end{aligned}$$

が得られ，

$$\int_0^{\pi} |\,a\,\sin x + b\,\cos x\,|\,dx = 2\,\sqrt{a^2+b^2}$$

である．■