解析学１　解答例

2017.01.17

■　定積分

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

について次の問いに答えよ．

(1) I_{n+2} を I_n と n を用いて表せ．

(2) I_6，I_7 を求めよ．

（解） (1) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，部分積分法により

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,\left[-\cos x\right]'\,dx \\ &= \left[\sin^{n+1} x \cdot (-\cos x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \{(n+1)\,\sin^n x\,\cos x\} \cdot (-\cos x)\,dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = (n+1)\,I_n - (n+1)\,I_{n+2} \end{aligned}$$

となり，

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,I_n$$

が得られる．(2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1, \\ I_2 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

より

$$I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{32}, \qquad I_7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{16}{35}$$

である．■