解析学１　解答例

2017.01.10

■　各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，極限

$$A_k = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{n=1}^{N} n^k \right\}$$

を求めよ．

(解)　各 k，$N \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_N(k) = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{n=1}^{N} n^k$$

とおくと，

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{\ell=0}^{k} {}_{k+1}C_\ell \, n^\ell, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より

$$\begin{aligned}
(N+1)^{k+1} - 1^{k+1} &= \sum_{n=1}^{N} \left\{ (n+1)^{k+1} - n^{k+1} \right\} = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{\ell=0}^{k} {}_{k+1}C_\ell \, n^\ell \right\} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \left\{ {}_{k+1}C_\ell \sum_{n=1}^{N} n^\ell \right\} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ {}_{k+1}C_\ell \, S_N(\ell) \, N^{\ell+1} \right\} + {}_{k+1}C_k \, S_N(k) \, N^{k+1}
\end{aligned}$$

が得られ，

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k+1} - \frac{1}{N^{k+1}} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ {}_{k+1}C_\ell \, S_N(\ell) \, N^{\ell-k} \right\} + (k+1) \, S_N(k), \qquad k, N \in \mathbb{N}$$

が成り立つ．簡単な計算により

$$A_1 = \lim_{N\to\infty} S_N(1) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N\,(N+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

である．また，自然数 $k \geq 2$ の場合に，数列 $\{ S_N(\ell) \}_{N=1}^{\infty}$ $(1 \leq \ell < k)$ が収束すると仮定すると，$\{ S_N(\ell) \}_{N=1}^{\infty}$ $(1 \leq \ell < k)$ は有界であり，$\ell < k$ のときには $\ell - k < 0$ であるから，

$$A_k = \lim_{N\to\infty} S_N(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{k+1} \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k+1} - \frac{1}{N^{k+1}} - \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ {}_{k+1}C_\ell \, S_N(\ell) \, N^{\ell-k} \right\} \right] = \frac{1}{k+1}$$

が成り立つ，つまり，$\{ S_N(k) \}_{N=1}^{\infty}$ は $1/(k+1)$ に収束する．数学的帰納法により，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_k = \lim_{N\to\infty} S_N(k) = \frac{1}{k+1}$$

である．■