解析学１　解答例

2016.12.20

■　実数 a，b，c，d，e，f に対して，関数 $z = g(x, y)$ を

$$z = g(x, y) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f$$

により定める．条件 $a > 0$，$a\,c - b^2 > 0$ のもとで，関数 $z = g(x, y)$ の最小値および最大値を調べよ．

(解) $a > 0$，$a\,c > b^2 \geq 0$ より $c > 0$ であることに注意したい．与えられた二次形式は関係式

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2\,a\,x + 2\,b\,y + d, \qquad 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2\,b\,x + 2\,c\,y + e$$

をみたす点 (x_0, y_0)，つまり，

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,a & 2\,b \\ 2\,b & 2\,c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix} = \frac{1}{2\,(b^2 - a\,c)} \begin{pmatrix} c\,d - b\,e \\ a\,e - b\,d \end{pmatrix}$$

において最小値または最大値を取る可能性がある．ヘッセ行列 H は

$$H = \begin{pmatrix} 2\,a & 2\,b \\ 2\,b & 2\,c \end{pmatrix}$$

であるから，H の固有値は方程式

$$0 = \Phi(\lambda) = \det(H - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 2\,a - \lambda & 2\,b \\ 2\,b & 2\,c - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2\,a)\,(\lambda - 2\,c) - 4\,b^2$$

の解である．中間値の定理と

$$\Phi(0) = \Phi(2\,(a + c)) = 4\,(a\,c - b^2) > 0, \qquad \Phi(2\,a) = \Phi(2\,c) = -4\,b^2 \leq 0$$

により H のすべての固有値は正であるから，関数 $z = g(x, y)$ は点 (x_0, y_0) において最小値を取るが，最大値は存在しない．■