解析学１　解答例

2016.12.06

■　a，b を実数とする．3×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

について，(1) A の固有値，および，(2) A^n （$n \in \mathbb{N}$）を求めよ．

（解） (1) A の固有値は特性方程式

$$0 = \det(A - \lambda\, E) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)\,(b-\lambda)^2$$

の解 λ であるから，A の固有値は $\lambda = a$，$\lambda = b$ である．(2)

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^0 = E, \qquad J^0 = E$$

とおくと，$J^2 = O$,

$$B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

である．また,

$$B\,J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J\,B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $B\,J = J\,B$ であるから，二項定理より

$$\begin{aligned} A^n =& (B+J)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, B^{n-k}\, J^k = {}_nC_0\, B^n + {}_nC_1\, B^{n-1}\, J \\ =& \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n\,b^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & n\,b^{n-1} \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．■