解析学１　解答例

2016.11.15

■　n，k を自然数とするとき，関数 $f(x) = |\,x\,|^n$ の第 k 次導関数を調べよ．

(解)　n が偶数のとき，$|\,x\,|^2 = x^2$ より $f(x) = x^n$ と表されるので，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $f(x)$ の第 k 次導関数が存在する．

n が奇数のときを考える．$x > 0$ のときには $f(x) = x^n$ より

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} {}_nP_k\, x^{n-k} & (k < n) \\ {}_nP_n & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

であり，$x < 0$ のときには $f(x) = -x^n$ より

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} -{}_nP_k\, x^{n-k} & (k < n) \\ -{}_nP_n & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

である．$f(x)$ を第 0 次導関数と呼ぶことにし，$f(x)$ の第 ℓ　$(0 \leq \ell < n)$ 次までの導関数は存在するが，第 $(\ell+1)$ 次導関数は存在しないとする．$f^{(\ell-1)}(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であるから，

$$f^{(\ell-1)}(0) = \lim_{x \to \pm 0} f^{(\ell-1)}(x) = 0$$

となり，

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f^{(\ell-1)}(h) - f^{(\ell-1)}(0)}{h} \right| = \lim_{h \to 0} \left\{ {}_nP_{\ell-1}\, |\,h\,|^{n-\ell} \right\} = 0$$

が得られるので，$f^{(\ell)}(0) = 0$ である，つまり，$f^{(\ell)}(x)$ も $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．$\ell + 1 < n$ ならば，同様に $f^{(\ell+1)}(0) = 0$ が得られ，$f^{(\ell+1)}(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数となり，矛盾である．したがって，$\ell + 1 \geq n$ である．$\ell = n - 1$ のとき

$$\lim_{h \to -0} \frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-{}_nP_{n-1}\, h}{h} = -{}_nP_{n-1} < 0,$$
$$\lim_{h \to +0} \frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{{}_nP_{n-1}\, h}{h} = {}_nP_{n-1} > 0$$

となるので，$f(x)$ の第 $(n-1)$ 次までの導関数は存在するが，第 n 次導関数は存在しない．■