

解析学 1 解答例

2016.11.08

■ 関数 $f(x)$ を $f(x) = 1 - |2x - 1|$ により定義するとき、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、関数

$$y = g_2(x) = f(f(x)), \quad y = g_3(x) = f(f(f(x)))$$

のグラフの概形を描け.

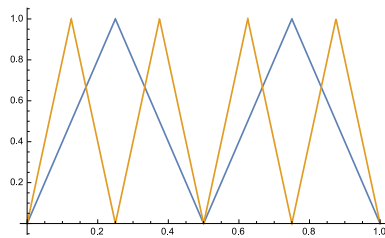
(解) 絶対値の定義より

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (1 - 2x) = 2x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 1 - (2x - 1) = 2 - 2x & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となるので、すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$f(x) = f(1 - x), \quad g_2(x) = g_2(1 - x), \quad g_3(x) = g_3(1 - x)$$

が成り立つ、つまり、関数 $y = f(x)$, $y = g_2(x)$, $y = g_3(x)$ のグラフは直線 $x = 1/2$ に関して線対称である.



青色： $y = g_2(x)$

橙色： $y = g_3(x)$

$0 \leq x \leq 1/2$ の範囲では

$$g_2(x) = f(2x) = \begin{cases} 2(2x) = 4x & (0 \leq x \leq 1/4) \\ 2 - 2(2x) = 2 - 4x & (1/4 \leq x \leq 1/2) \end{cases}$$

$$g_3(x) = f(g_2(x)) = \begin{cases} 2(4x) = 8x & (0 \leq x \leq 1/8) \\ 2 - 2(4x) = 2 - 8x & (1/8 \leq x \leq 1/4) \\ 2 - 2(2 - 4x) = 8x - 2 & (1/4 \leq x \leq 3/8) \\ 2(2 - 4x) = 4 - 8x & (3/8 \leq x \leq 1/2) \end{cases}$$

であるから、関数 $y = g_2(x)$, $y = g_3(x)$ のグラフは上図のようになる. ■