解析学１　解答例

2016.11.01

■　$A > 0$ とする．定義に従って，関数 $f(x) = Ax^2$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

（解） $a \in \mathbb{R}$，$\varepsilon > 0$ を任意にとる．

$$0 < \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{A\,(1+2\,|\,a\,|)}\right\}$$

とおくと，

$$\delta \leq 1, \qquad \delta \leq \frac{\varepsilon}{A\,(1+2\,|\,a\,|)}$$

である．$d(x,a) = |\,x-a\,| < \delta$ をみたす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，三角不等式より

$$|\,x\,| = |\,(x-a)+a\,| \leq |\,x-a\,| + |\,a\,| < \delta + |\,a\,| \leq 1 + |\,a\,|$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) =& |\,f(x)-f(a)\,| = |\,A\,(x+a)\,(x-a)\,| = A\,|\,x+a\,|\,|\,x-a\,| \\ \leq& A\,(|\,x\,| + |\,a\,|)\,|\,x-a\,| \leq A\,\{(1+|\,a\,|) + |\,a\,|\}\,|\,x-a\,| < A\,(1+2\,|\,a\,|)\,\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

が得られる．したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(x)$ は $x = a$ で連続である，つまり，$f(x) = Ax^2$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である．■