解析学１　解答例

2016.10.25

■　数列 $\{\gamma_n\}$ はすべての自然数 n に対して $0 \leq \gamma_n < 1$ をみたすものとし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \gamma_n\, a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，次の問に答えよ．

(1) 定数 $0 \leq \gamma < 1$ を用いて $\gamma_n = \gamma$ （$n \in \mathbb{N}$）と表せるとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を調べよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ が成り立つ $\{\gamma_n\}$ が存在するか調べよ．存在する場合にはその例を挙げよ．

(解) (1)：$\{a_n\}$ は初項 1，公比 γ の等比数列であるから，一般項 a_n は $a_n = \gamma^{n-1}$ と表される．$0 \leq \gamma < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \gamma^{n-1} = 0$$

である．

(2)： 数列 $\{a_n\}$，$\{\gamma_n\}$ を

$$a_n = \frac{n+3}{2\,(n+1)}, \qquad \gamma_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義すると，

$$0 \leq \gamma_n = \frac{(n+1)\,(n+4)}{(n+2)\,(n+3)} = \frac{n^2 + 5\,n + 4}{n^2 + 5\,n + 6} < 1$$

であるから，$\{a_n\}$ は与えられた漸化式をみたし，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3/n}{2 + 2/n} = \frac{1}{2}$$

である．■