

## 解析学 1 解答例

2016.10.18

■  $\mathbb{R}$  の開区間  $A = (a, b)$  の閉包  $\text{Cl}A$  は  $\text{Cl}A = [a, b]$  であることを示せ.

(解)  $(a, b) = A \subset \text{Cl}A$  であることに注意したい. (1)  $x < a$  を任意に取る.  $\varepsilon = (a - x)/2 > 0$  に対して,

$$x - \varepsilon < x < x + \varepsilon = \frac{x + a}{2} < a, \quad \text{つまり, } U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

であるから,  $x \notin \text{Cl}A$  が成り立つ. 同様に,  $x > b$  に対しても  $x \notin \text{Cl}A$  が成り立つことが示せる. (2) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b - a}{2}\right) > 0, \quad y = a + \delta$$

とおくと,

$$\begin{aligned} a - \varepsilon < a < y = a + \delta \leq a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon, \quad \text{つまり, } y \in U_\varepsilon(a), \\ a < y = a + \delta \leq a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2} < b, \quad \text{つまり, } y \in A \end{aligned}$$

となるので,  $y \in U_\varepsilon(a) \cap A$  が成り立つ. したがって,  $a \in \text{Cl}A$  である. 同様に,  $b \in \text{Cl}A$  であることも示せる. 以上から,  $\text{Cl}A = [a, b]$  である. ■