

解析学 1 解答例

2016.10.11

■ 5 個のビーカー A, B, C, D, E があり、それらにはそれぞれ uL, vL, wL, xL, yL の水が入っており、条件

$$u > v \geq w \geq x \geq y > 0, \quad u + v + w + x + y = 1$$

をみたしているとする。これらのビーカーに対して、次の操作をビーカーが 1 個になるまで繰り返す。

最も水の量が少ないビーカー 2 個を選び、一方の水全部を他方に移し、空になったビーカーを捨てる。

このとき、ビーカー A の水の量 uL が $u > 2/5$ の場合について、ビーカーが 2 個になったとき、ビーカー A はどのようにになっているかを調べよ。

(解) k ($k \geq 3$) 個になったとき初めて、水の量が uL 以上のビーカーが現れたとする。直前の $(k+1)$ 個のときの各ビーカーの水の量を $uL, v_1L, v_2L, \dots, v_kL$ とすると、

$$v_{k-1} + v_k \geq u > v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_{k-1} \geq v_k > 0, \quad 1 = u + \sum_{\ell=1}^k v_\ell = u + \sum_{\ell=1}^{k-2} v_\ell + v_{k-1} + v_k$$

が成り立つ。 $k-1 \geq 2 > 1$ より

$$\frac{2}{5} < u \leq v_{k-1} + v_k \leq 2v_{k-1}, \quad \text{つまり,} \quad \frac{1}{5} < v_{k-1} \leq v_{k-2} \leq \dots \leq v_1$$

であるから、

$$\frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} > 1 - u - (v_{k-1} + v_k) = \sum_{\ell=1}^{k-2} v_\ell > v_1 > \frac{1}{5}$$

となり矛盾である。したがって、 k ($k \geq 3$) 個のときにはビーカー A の水の量は uL で、その量は他のビーカーの水の量より多い、つまり、ビーカーが 3 個になったとき、水の量を uL, w_1L, w_2L とすると $u > w_1 \geq w_2 > 0$ である。さらに操作を行い、ビーカーが 2 個になったとき、ビーカー A は残っており、その水の量は変化していない。 ■