

解析学1 解答例

2016.10.04

■ 次の命題が真であれば証明を与え、偽であれば反例を挙げよ。ただし、 x および y は実数とする。

(1) $x^2 + y^2 \leq 1$ ならば $|x|^2 + |y|^2 \leq 1$ である。

(2) $|x|^2 + |y|^2 \leq 1$ ならば $x^2 + y^2 \leq 1$ である。

(3) $x^3 + y^3 \leq 1$ ならば $|x|^3 + |y|^3 \leq 1$ である。

(4) $|x|^3 + |y|^3 \leq 1$ ならば $x^3 + y^3 \leq 1$ である。

(解) (1), (2) : $x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2$ より、命題 (1) と (2) はともに真である。

(3) : $x = 1, y = -1$ について、 $x^3 + y^3 = 0 \leq 1$ であるが、 $|x|^3 + |y|^3 = 2 > 1$ となり、命題 (3) は偽である。

(4) : $|x|^3 + |y|^3 \leq 1$ より、 $x \leq |x| \leq 1, y \leq |y| \leq 1$ が成り立つので、

$$x^3 + y^3 = x \cdot x^2 + y \cdot y^2 = x \cdot |x|^2 + y \cdot |y|^2 \leq |x| \cdot |x|^2 + |y| \cdot |y|^2 = |x|^3 + |y|^3 \leq 1$$

となり、命題 (4) は真である。 ■