2019 年度　微積分 II　出席カード兼小テスト No. 7

2019.11.22

学生証番号（　　　　　　　　　　　　）　　氏名（　　　　　　　　　　　　）

1　関数 $f(x,y)=\sqrt{1+2x+4y}$ の原点 $(0,0)$ における 2 次の近似多項式 $P_2(x,y)$ を求めよ．

（解） $g(t)=\sqrt{t}$ とおくと，

$$\frac{dg}{dt}(t)=\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2},\qquad \frac{d^2g}{dt^2}(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}\right]=-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

であることに注意したい．$f(x,y)=g(1+2x+4y)$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=&\ \frac{dg}{dt}(1+2x+4y)\cdot 2 &&=\frac{1}{\sqrt{1+2x+4y}},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=&\ \frac{dg}{dt}(1+2x+4y)\cdot 4 &&=\frac{2}{\sqrt{1+2x+4y}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=&\frac{d^2g}{dt^2}(1+2x+4y)\cdot 2\cdot 2&&=-\frac{1}{(1+2x+4y)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=&\frac{d^2g}{dt^2}(1+2x+4y)\cdot 2\cdot 4&&=-\frac{2}{(1+2x+4y)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=&\frac{d^2g}{dt^2}(1+2x+4y)\cdot 4\cdot 4&&=-\frac{4}{(1+2x+4y)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

であるから，

$$f(0,0)=1,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-1,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-4$$

が得られ，

$$\begin{aligned}
P_2(x,y)=&f(0,0)+\frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\,x\,y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right\}\\
=&1+x+2\,y-\frac{x^2}{2}-2\,x\,y-2\,y^2
\end{aligned}$$

となる．■