2019 年度　微積分 II　出席カード兼小テスト No. 6

2019.11.15

学生証番号（　　　　　　　　　　）　　氏名（　　　　　　　　　　）

[1]　次の問いに答えよ．

(1) $g(t)$ を C^2 級の 1 変数関数とし，$f(x,y) = g(x^2+y^2)$ とするとき，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\,g'(x^2+y^2) + 4\,(x^2+y^2)\,g''(x^2+y^2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(x,y) = x\,e^y$，$g(r,\theta) = f(r\,\cos\theta, r\,\cos\theta)$ とするとき，$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ および $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ を求めよ．

（解） (1) 合成関数の微分公式により

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2\,x\,g'(x^2+y^2), & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2\,g'(x^2+y^2) + 4\,x^2\,g''(x^2+y^2),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\,y\,g'(x^2+y^2), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2\,g'(x^2+y^2) + 4\,y^2\,g''(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

が得られ，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\,g'(x^2+y^2) + 4\,(x^2+y^2)\,g''(x^2+y^2)$$

となる．(2) $g(r,\theta) = r\,e^{r\,\sin\theta}\,\cos\theta$ と表されるので，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= e^{r\,\sin\theta}\,\cos\theta + r\,e^{r\,\sin\theta}\,\sin\theta\,\cos\theta = e^{r\,\sin\theta}\,\cos\theta\,(1 + r\,\sin\theta),\\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= r^2\,e^{r\,\sin\theta}\,\cos^2\theta - r\,e^{r\,\sin\theta}\,\sin\theta = r\,e^{r\,\sin\theta}\,(r\,\cos^2\theta - \sin\theta)
\end{aligned}$$

が得られる．また，$g(r,\theta)$ を実際に求めずに，合成関数の微分法を用いると，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\,\cos\theta, r\,\cos\theta), \frac{\partial f}{\partial y}(r\,\cos\theta, r\,\cos\theta)\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\\
&= \left(e^{r\,\cos\theta}, r\,\cos\theta\,e^{r\,\sin\theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{pmatrix}\\
&= \left(e^{r\,\sin\theta}\,\cos\theta\,(1 + r\,\sin\theta), r\,e^{r\,\sin\theta}\,(r\,\cos^2\theta - \sin\theta)\right)
\end{aligned}$$

のようにも計算できる．■