2019 年度　微積分 II　出席カード兼小テスト No. 3

2019.10.18

学生証番号（　　　　　　　　　　　　　）　　氏名（　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

により定義するとき，$f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ における連続性について調べよ．さらに，$f(x,y)$ の原点における偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ が存在するか否か調べよ．

（解） 極座標 $x=r\,\cos\theta$，$y=r\,\sin\theta$ を用いると，

$$f(x,y)=f(r\,\cos\theta,r\,\sin\theta)=\frac{e^{r^2}-1}{r^2}$$

となる．平均値の定理より

$$\frac{e^{r^2}-1}{r^2}=\frac{e^{r^2}-e^0}{r^2-0}=e^{\omega(r)\,r^2}$$

をみたす $0<\omega(r)<1$ が存在するので，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to0}\frac{e^{r^2}-1}{r^2}=\lim_{r\to0}e^{\omega(r)\,r^2}=1=f(0,0)$$

が得られ，$f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において連続である．また，ロピタルの定理と

$$\lim_{h\to0}\frac{\left[e^{h^2}-1-h^2\right]'}{[h^3]'}=\lim_{h\to0}\frac{2\,h}{3}\cdot\frac{e^{h^2}-1}{h^2}=0\cdot1=0$$

より

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3}=0$$

である．

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3}=0,$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3}=0$$

より，偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ は存在し，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ である．■