2019 年度　微積分 II　出席カード兼小テスト No. 1

2019.10.04

学生証番号（　　　　　　　　　　　　　）　　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x^2}{2\,x}$ の収束・発散を調べよ．

（解） 極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ を用いて，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x^2}{2\,x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1+0\cdot 1=\frac{1}{2}$$

が得られる．■

(2) 関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ （$x>0$）の導関数を求めよ．

（解） 対数微分法を用いると，

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\left[\log y\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{\log x}{x}\right]=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

となり，求める導関数は

$$y'=(1-\log x)\;x^{\frac{1}{x}-2}$$

である．■

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2}\,dx$ の収束・発散を調べよ．

（解） $\left[e^{-x^2}\right]'=-2\,x\,e^{-x^2}$ より

$$\int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2}\,dx=\lim_{u\to+\infty}\int_0^{u}x\,e^{-x^2}\,dx=\lim_{u\to+\infty}\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1-e^{-u^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

となる．■