基礎微積分 I ・微積分 I　小テスト　No. 13

2018.07.13

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. 広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$ の収束・発散を調べよ．

(解) 各 $v>0$ に対して，変数変換 $t=x^2$ により

$$\begin{aligned}
\int_0^{v} \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx &= \int_0^{v^2} \frac{t}{2(1+t)^3}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{v^2} \left\{\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\right]_0^{v^2} \\
&= -\frac{1+2v^2}{4(1+v^2)^2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx &= \lim_{v\to+\infty}\int_0^{v} \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx \\
&= \lim_{v\to+\infty}\left\{-\frac{1+2v^2}{4(1+v^2)^2} + \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

となり，与えられた積分は収束する． ■

2. 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx$ の収束・発散を調べよ．

(解) 与えられた積分の被積分関数は $x=0$ において定義されていないことに注意したい．各 $0<u<\pi/4$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_u^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx &= \int_u^{\frac{\pi}{4}} \frac{[\tan x]'}{\tan x}\,dx \\
&= [\log(\tan x)]_u^{\frac{\pi}{4}} = -\log(\tan u)
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx &= \lim_{u\to+0}\int_u^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx \\
&= \lim_{u\to+0}\{-\log(\tan u)\} = +\infty
\end{aligned}$$

となり，与えられた積分は発散する． ■