基礎微積分 I ・微積分 I　　小テスト　No. 10

2018.06.15

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. 分数関数

$$f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)}$$

を部分分数分解し，$f(x)$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(解) 定数 A，B を用いて

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

と表すと，x に関する恒等式

$$x+2 = A(x-1) + B(x-2)$$

が得られ，$A=4$，$B=-3$ である．したがって，

$$f(x) = \frac{4}{x-2} - \frac{3}{x-1}$$

と部分分数分解でき，求める不定積分は

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \left(\frac{4}{x-2} - \frac{3}{x-1}\right) dx \\ &= 4\log|\,x-2\,| - 3\log|\,x-1\,| + C\end{aligned}$$

となる．ここで，C は積分定数である．■

2. 分数関数

$$f(x) = \frac{4}{x^4-1}$$

を部分分数分解せよ．

(解) 因数分解することにより

$$\begin{aligned}x^4-1 =& (x^2-1)(x^2+1) \\ =& (x-1)(x+1)(x^2+1)\end{aligned}$$

と表せることに注意したい．

$$2 = (x^2+1) - (x^2-1), \quad 2 = (x+1) - (x-1)$$

より

$$\begin{aligned}f(x) =& 2\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} \\ =& \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2+1} \\ =& \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\end{aligned}$$

と部分分数分解できる．■