基礎微積分 I ・微積分 I　　小テスト　No. 7

2018.06.01

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. 関数 $y = f(x) = (x-1)e^{-x}$ の増減凹凸を調べ，グラフをかけ．

(解) $f(x)$ を微分すると，

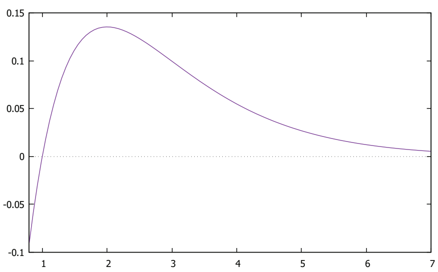
$$f'(x) = e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) = (2-x)e^{-x},$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (2-x)(-e^{-x}) = (x-3)e^{-x}$$

となる．また，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ であり，ロピタルの定理と

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x-1]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

より $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ となる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$1/e$	$\searrow$	$2/e^2$	$\searrow 0$



$y = f(x)$ の増減凹凸，グラフは上のようになる．■

2. 関数 $y = f(x) = (2x-1)e^{x-x^2}$ の最大値および最小値を求めよ．

(解) $f(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{x-x^2} + (2x-1)\{(1-2x)e^{x-x^2}\} \\ &= -(2x-1+\sqrt{2})(2x-1-\sqrt{2})e^{x-x^2} \end{aligned}$$

となる．$\alpha_\pm = (1\pm\sqrt{2})/2$ とおく．また，ロピタルの定理と

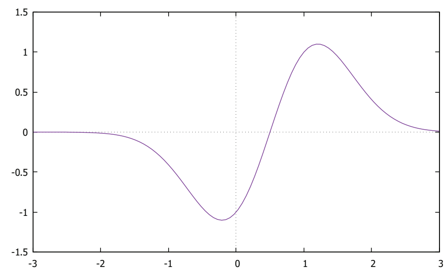
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{[2x-1]'}{\left[e^{x(x-1)}\right]'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{(1-2x)e^{x(x-1)}} = 0$$

より

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{e^{x(x-1)}} = 0$$

である．

x	$\cdots$	α_-	$\cdots$	α_+	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\sqrt{2}e^{-1/4}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-1/4}$	$\searrow 0$



上記の増減表により，$x = \alpha_-$ で最小値 $-\sqrt{2}e^{-1/4}$ を取り，$x = \alpha_+$ で最大値 $\sqrt{2}e^{-1/4}$ を取る．■