

学生番号： _____ 氏名： _____

/10

1. 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2}$ を調べよ.

(解) 分母・分子に $1 + \cos x$ を掛けると,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \cos x} \right\} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる. ■

2. 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$ を調べよ.

(解) 0/0 型の不定形であることに注意したい.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \log(1+x)]'}{[x^2]'} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので, ロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

である. ■

3. 極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$ を調べよ. ただし, 必要があれば, 任意の実数 $a > 0$ に対して $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ が成り立つことを証明せずに用いても良い.

(解) すべての $x > 0$ に対して

$$3 = (3^x)^{\frac{1}{x}} < (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} < (2 \cdot 3^x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3$$

であり, はさみうちの原理と $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} = 3$$

である. ■

4. 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 2x}{x}$ を調べよ.

(解) 変数変換 $y = \sin^{-1} 2x$ を用いると, $x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^{-1} 2x}{2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{\sin y} = 2$$

である. ■