基礎微積分 I ・微積分 I　　小テスト　No. 1

2018.04.13

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. 方程式 $2^{2x} - 2^{1-x} = 3$ を解け．

(解) $X = 2^x$ とおくと，与えられた方程式は

$$\begin{aligned} 0 =& 2^{2x} - 2^{1-x} - 3 = (2^x)^2 - \frac{2}{2^x} - 3 \\ =& \frac{X^3 - 3X - 2}{X} = \frac{(X-2)(X+1)^2}{X} \end{aligned}$$

と表せ，$X > 0$ より上記の方程式の解は $X = 2$ のみである．したがって，与えられた方程式の解は

$$x = \log_2 X = \log_2 2 = 1$$

である．■

2. 関数

$$f(x) = 5^{1+x} + 5^{-x}, \quad g(x) = \log_5 x$$

についての合成関数 $(f \circ g)(x)$ を求めよ．

(解) 明らかに $(f \circ g)(x)$ の定義域は $x > 0$ の範囲である．$5^{\log_5 x} = x$ より

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) =& 5^{1+\log_5 x} + 5^{-\log_5 x} \\ =& 5^1 \cdot 5^{\log_5 x} + \frac{1}{5^{\log_5 x}} = 5x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる．■

3. 2 つの数 $\frac{3}{2}$，$\log_3 5$ の大小を比較せよ．

(解) 対数関数 $y = \log_3 x$ は x に関して単調増加であることに注意したい．底が 3 の対数で表現すると，

$$\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 \sqrt{27} > \log_3 \sqrt{25} = \log_3 5$$

となる．■

4. 関数 $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ の逆関数を求めよ．

(解) 実数 x に対して

$$1 - y = \frac{2}{e^x + 1} > 0, \quad 1 + y = \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$$

より $-1 < y < 1$ となるので，逆関数の定義域は $-1 < x < 1$ である．x と y を入れ替えると，

$$\begin{aligned} x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \quad &\Longleftrightarrow \quad e^y = \frac{1+x}{1-x} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \log \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

となるので，逆関数は

$$y = \log \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

である．■