基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 12

2018.06.29

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　/10

1. 定積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\log x)^2}\,dx$ を求めよ．

(解) 変数変換 $t=\log x$ により

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\log x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

となる．■

2. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx$ を求めよ．

(解) 変数変換 $x=\sin t$ により

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{1+\sin t}\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{1+\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t)\,dt \\ &= [t+\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}\end{aligned}$$

となる．■

3. 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 3} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ を求めよ．

(解) 変数変換 $t=e^x$ により

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 3} \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int_1^3 \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^3 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= [\log t-\log(t+1)]_1^3 = \log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる．■

4. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ を求めよ．

(解) 関係式 $2=(x^2+1)-(x+1)(x-1)$ により

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \left[\log(x+1)-\frac{\log(x^2+1)}{2}+\tan^{-1}x\right]_0^1 \\ &= \frac{\log 2}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\log 4+\pi}{4}\end{aligned}$$

となる．■

5. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ を求めよ.

(解) 関係式

$$\begin{aligned} 2x^2 =& 2(x^2+1)-2, \\ 2x^2 =& x\{(x+1)^2-(x^2+1)\} \end{aligned}$$

により

$$2 = (x+2)(x^2+1) - x(x+1)^2$$

が得られ,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx \\ &\quad = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right\} dt \\ &\quad = \left[\log(x+1)-\frac{1}{x+1}-\frac{\log(x^2+1)}{2}\right]_0^1 \\ &\quad = \frac{1+\log 2}{2} \end{aligned}$$

となる. ■