基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 7

2018.06.01

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　　/10

1. 点 $(1,2)$ における曲線 $y = f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ の接線および法線の方程式を求めよ．

(解) $f'(x) = -8x/(1+x^2)^2$ より $f'(1) = -2$ である．したがって，接線および法線の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)+2 = -2x+4, \\ y &= \frac{1}{2}(x-1)+2 = \frac{x+3}{2} \end{aligned}$$

である．■

2. すべての $x>0$ に対して不等式 $e^x > 1+x$ が成り立つことを示せ．

(解) 関数 $f(x)$ を $f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x>0)$$

である．$x > 0$ の範囲で $f(x)$ は単調増加であり，$f(0) = 0$ であるから，すべての $x>0$ に対して $f(x) > 0$ となる．したがって，示すべき不等式が成り立つ．■

3. 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について，$x=0$ における値 $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(解) 無限等比級数の和の公式より，$|x| < 1$ の範囲で $f(x)$ はマクローリン級数として

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$$

と表されるので，

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}n!, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

である．■

4. 自然数 n に対して，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$ を調べよ．

(解) 問 2 の不等式より，すべての $x>0$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &< x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^{x/(n+1)}\cdot\left\{e^{x/(n+1)}\right\}^n} \\ &< \frac{x^n}{e^{x/(n+1)}\cdot\{1+x/(n+1)\}^n} < \frac{(n+1)^n}{e^{x/(n+1)}} \end{aligned}$$

が得られるので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right) = 0$$

となる．■

5. $0 < x < 1$ の範囲で定義された関数

$$y = f(x) = x\log x + (1-x)\log(1-x)$$

の増減凹凸を調べ，グラフを描け．ただし，必要があれば，極限 $\lim_{x\to+0}(x\log x) = 0$ を用いてよい．

(解) $f(x)$ を微分すると，

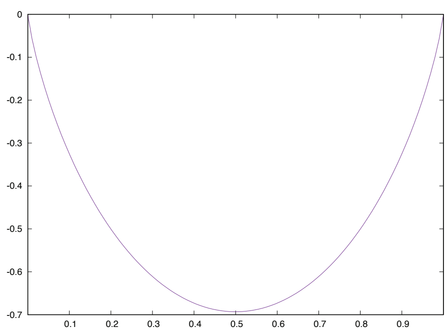
$$\begin{aligned} f'(x) =& 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} \\ &+(-1)\cdot\log(1-x) + (1-x)\cdot\frac{-1}{1-x} \\ =& \log x - \log(1-x), \\ f''(x) =& \frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} > 0 \end{aligned}$$

となり，$0 < x < 1$ の範囲で方程式 $f'(x) = 0$ の解は $x = 1/2$ のみである．また，

$$\lim_{x\to+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to1-0} f(x) = 0$$

であることに注意したい．

x	0	$\cdots$	$1/2$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$
$f''(x)$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$\times$
$f(x)$	$\times$	$_0\searrow$	$-\log 2$	$\nearrow_0$	$\times$



関数 $y = f(x)$ の増減凹凸およびグラフは上のようになる． ■