基礎微積分 I ・微積分 I　課題　No. 6

2018.05.25

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ を調べよ.

(解) 0/0 型の不定形であることに注意したい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]'}{[x^3]'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{3(1+\cos x)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}=\frac{1}{6}$$

とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

である. ■

2. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^{2x}+x)}{x}$ を調べよ.

(解) 0/0 型の不定形であることに注意したい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\log(e^{2x}+x)\right]'}{[x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}=3$$

とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^{2x}+x)}{x}=3$$

である. ■

3. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}$ を調べよ.

(解) 問 1 と

$$\frac{x-\tan x}{x-\sin x}=1+\frac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}$$
$$=1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{x^3}{x-\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x(\cos x+1)}$$

より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}=1-1^3\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=-2$$

となる. ■

4. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(x\log\frac{x+2}{x-1}\right)$ を調べよ.

(解) 変数変換 $t=3/(x-1)$ を行い, $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ を用いると,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x\log\frac{x+2}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{3\log(1+t)^{\frac{1}{t}}+\log(1+t)\right\}$$
$$=3\log e+\log 1=3$$

となる. ■

5. 平均値の定理を用いて，すべての a，b （$a > b \geqq e$）に対して

$$\log(\log a) - \log(\log b) < \frac{a-b}{e}$$

が成り立つことを示せ．

(解) 関数 $f(x) = \log(\log x)$ は $x > 1$ の範囲で定義され，合成関数の微分法により

$$f'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$$

となる．平均値の定理より

$$\begin{aligned}&\frac{\log(\log a) - \log(\log b)}{a-b}\\ &\qquad = \frac{f(a) - f(b)}{a-b} = f'(c) = \frac{1}{c \log c}\end{aligned}$$

をみたす $b < c < a$ が存在する．$c > e$ より

$$c \log c > c \log e = c > e$$

であるから，

$$\log(\log a) - \log(\log b) = \frac{a-b}{c \log c} < \frac{a-b}{e}$$

が成り立つ． ■