基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 5

2018.05.18

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　　/10

1. 関数 $f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}$ を微分せよ．

(解) すべての x に対して $\sqrt{1+x^2}>x$ であることに注意したい．合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) \\ =& -\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

となる．■

2. 合成関数の微分法を用いて，逆正弦関数 $f(x)=\sin^{-1}x$ を微分せよ．

(解) すべての $-1\leqq x\leqq 1$ に対して

$$|\,f(x)\,|\leqq\frac{\pi}{2},\quad x=\sin f(x)$$

が成り立つ．合成関数の微分法により

$$\begin{aligned} 1=[x]'=[\sin f(x)]'&=\cos f(x)\cdot f'(x) \\ =&\sqrt{1-\sin^2 f(x)}f'(x)=\sqrt{1-x^2}f'(x) \end{aligned}$$

が得られ，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．■

3. 関数 $f(x)=\dfrac{x^3(x+2)^3}{(x+1)^6}$ を微分せよ．

(解) 合成関数の微分法より，

$$\left[\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right]'=\left[1-(x+1)^{-2}\right]'=\frac{2}{(x+1)^3}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f'(x) =& \left[\left\{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right\}^3\right]' \\ =& 3\left\{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right\}^2\frac{2}{(x+1)^3}=\frac{6x^2(x+2)^2}{(x+1)^7} \end{aligned}$$

となる．■

4. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{3x^2}}{x-x^2}$ を調べよ．

(解) $f(x)=e^{3x}$ とおくと，$f'(x)=3e^{3x}$ であり，変数変換 $t=x-x^2$ と微分の定義より

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{e^{3\,(x-x^2)}-1}{x-x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x-x^2)-f(0)}{x-x^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)=3 \end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{3x^2}}{x-x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{e^{3x^2}\cdot\frac{e^{3(x-x^2)}-1}{x-x^2}\right\}=3$$

である．■

5. 関数 $f(x) = x^{e^x}$ を微分せよ．

(解) $\log f(x) = \log x^{e^x} = e^x \log x$ であることに注意すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = [\log f(x)]' = e^x \cdot \log x + e^x \cdot \frac{1}{x}$$

より

$$f'(x) = x^{e^x} e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right) = x^{e^x - 1} e^x \left(x \log x + 1\right)$$

である． ■