基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 4

2018.05.11

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. 関数 $f(x) = \sqrt{|\,x\,|^3}$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ．

(解) $f(0) = 0$ であることに注意したい．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|\,h\,|^3}}{|\,h\,|}\\ &= \lim_{h\to 0}\sqrt{|\,h\,|} = 0\end{aligned}$$

より $|\,f'(0)\,| = 0$，つまり，$f'(0) = 0$ である．したがって，$f(x)$ は $x = 0$ において微分可能である．■

2. 関数 $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ を微分せよ．

(解) $g(x) = \sqrt{x}$，$h(x) = x^2 + x$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(x) &= g(h(x)), \quad h'(x) = 2x+1,\\ g'(x) &= \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

である．合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}f'(x) =& g'(h(x))h'(x)\\ =& \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\end{aligned}$$

となる．■

3. 関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ を微分せよ．

(解) 分母・分子に $\sqrt{x^2+1}-x$ を掛けると，

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2$$

であるから，合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}f'(x) =& 2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)\\ =& -\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

となる．■

4. n を自然数，$f(x)$ を $x = a$ で微分可能な関数とする．このとき，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n f(a) - a^n f(x)}{x-a}$$

を n，a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ．

(解) 微分の定義より

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}, \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{x^n f(a) - a^n f(x)}{x-a}\\ =& \lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\cdot f(a) - a^n\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\\ =& na^{n-1}f(a) - a^n f'(a)\end{aligned}$$

となる．■

5. 整式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余りを a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ．

(解) $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $Ax+B$ とすると，

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+Ax+B$$

と表せる．

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+A$$

より

$$f(a)=Aa+B,\quad f'(a)=A$$

であるから，$B=f(a)-af'(a)$ となり，求める余りは

$$Ax+B=f'(a)(x-a)+f(a)$$

である． ■