基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 3

2018.04.27

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}=3$ をみたす定数 a，b を求めよ．

(解) 仮定より

$$\begin{aligned}a+b+1&=\lim_{x\to 1}(ax^2+x+b)\\&=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{ax^2+x+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}=3\cdot 0=0\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}3&=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+x-a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(ax+a+1)=a+2\end{aligned}$$

より，$a=1$，$b=-2$ である．■

2. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$ を調べよ．

(解) $x\to-\infty$ のとき，$x<0$ と考えて良いので，$\sqrt{x^2}=|\,x\,|=-x$ であるから，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}\right\}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．■

3. $-1\leqq r\leqq 0$ とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}$ を調べよ．

(解) (1) $-1<r\leqq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}=\frac{r\cdot 0+2}{0+1}=2$$

である．(2) $r=-1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)+2}{1+1}=\frac{1}{2}$$

である．■

4. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$ を調べよ．

(解) すべての自然数 $n\geqq 4$ に対して，1 から n までのうち，4 以上の数をすべて 4 で置き換えると，$n!\geqq 6\cdot 4^{n-3}$ が得られ，

$$0\leqq\frac{3^n}{n!}\leqq\frac{3^n}{6\cdot 4^{n-3}}=\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

が成り立つ．はさみうちの原理と

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\right\}=0$$

により $\lim_{n\to\infty}3^n/n!=0$ となる．■

5. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{a+bx+x^2}-1}{x-1}=2$ をみたす定数 a，b を求めよ．

(解) 仮定より

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b+1}-1&=\lim_{x\to1}\left(\sqrt{a+bx+x^2}-1\right)\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{\sqrt{a+bx+x^2}-1}{x-1}\cdot(x-1)\right\}=2\cdot0=0\end{aligned}$$

となるので，$a+b=0$，つまり，$b=-a$ である．分母・分子に $\sqrt{a-ax+x^2}+1$ を掛けると，

$$\begin{aligned}2&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{a-ax+x^2}-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-a+1}{\sqrt{a-ax+x^2}+1}=\frac{2-a}{2}\end{aligned}$$

となるので，$a=-2$，$b=2$ が得られる． ■