基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 2

2018.04.20

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　/10

1. $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin^6\theta + \cos^6\theta$ の値を求めよ．

(解) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 4/3 > 1$ より，方程式 $\sin\theta\cos\theta = 2/3$ の解が実数の範囲の θ については存在しないため，指定された値を求めることはできない．しかし，追加資料のように，複素数の範囲の θ については解が存在するため，指定された値を求めることができる．■

2. $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，関数

$$f(x) = \sin x\cos x - \sin^2 x + 1$$

の最大値および最小値を求めよ．

(解) 三角関数の倍角の公式および合成により

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2} + 1 \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と表せる．

$$\frac{\pi}{4} \leqq 2x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{9\pi}{4}$$

より，関数 $f(x)$ は $x = \pi/8$ で最大値 $(1+\sqrt{2})/2$ をとり，$x = 5\pi/8$ で最小値 $(1-\sqrt{2})/2$ をとる．■

3. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．このとき，$\sin\theta \leqq \cos\theta$ をみたす θ の値の範囲を求めよ．

(解) 三角関数の合成を用いると，

$$0 \geqq \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，求める範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ である．■

4. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で

$$3\sin\theta - \sin 3\theta = \sqrt{2}$$

をみたす θ をすべて求めよ．

(解) 3 倍角の公式より

$$\begin{aligned} \sqrt{2} =& 3\sin\theta - \sin 3\theta \\ =& 3\sin\theta - \left(3\sin\theta - 4\sin^3\theta\right) = 4\sin^3\theta \end{aligned}$$

となり，$\sin\theta = \sqrt{2}/2$ が得られるので，$\theta = \pi/4$ および $\theta = 3\pi/4$ である．■

5. 次の式を簡単にせよ．

$$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

(解) 三角関数の加法定理より

$$\sin\left(\theta\pm\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-\sin\theta\pm\sqrt{3}\cos\theta}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\\&=\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta}{4}\\&\qquad+\frac{\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta}{4}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる． ■