基礎微積分 I ・微積分 I　　課題　No. 1

2018.04.13

学生番号：____________________　氏名：____________________　/10

1. 自然数 7^{2018} を 100 で割ったときの余りを求めよ．

(解) $7^1=7$，$7^2=49$，$7^4=2401$ であるから，

$$7^{2018}=7^{4\cdot 504+2}=2401^{504}\cdot 49$$

と表せる．2401^{504} を 100 で割ったときの余りは 1 であるから，7^{2018} を 100 で割ったときの余りは 49 である．■

2. 2 つの数 $\log_2 3$，$\log_3 5$ の大小を比較せよ．

(解) 対数関数 $\log_2 x$ および $\log_3 x$ は x に関して単調増加であるから，

$$\begin{aligned}\log_2 3 &=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}\\ &=\log_3\sqrt{27}>\log_3\sqrt{25}=\log_3 5\end{aligned}$$

となる．■

3. 不等式 $3\log_x 3+\log_3 x \geqq 4$ をみたす x の範囲を求めよ．

(解) 真数と底の条件により $x>0$，$x\neq 1$ である．$X=\log_3 x$ とおくと，$X\neq 0$ より

$$\begin{aligned}0 &\leqq 3\log_x 3+\log_3 x-4\\ &=\frac{3}{\log_3 x}+\log_3 x-4=\frac{X(X-1)(X-3)}{X^2}\end{aligned}$$

となるので，$0<X\leqq 1$ または $X\geqq 3$ である．$x=3^X$ より，求める範囲は

$$1=3^0<x\leqq 3^1=3 \quad \text{または} \quad x\geqq 3^3=27$$

となる．■

4. n は自然数，a は $0<a<1$ をみたすとする．$x=a^n+a^{-n}$ であるとき，$\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)^{\frac{1}{n}}$ を簡単にせよ．

(解) $a^n<a^{-n}$ より

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4} &=\sqrt{(a^n-a^{-n})^2}\\ &=\left|a^n-a^{-n}\right|=a^{-n}-a^n\end{aligned}$$

となることに注意すると，

$$\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)^{\frac{1}{n}}=\left(2a^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{1}{n}}a^{-1}=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{a}$$

である．■

5. 関係式

$$\begin{aligned}0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011,\\ 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772\end{aligned}$$

を用いて，不等式

$$10 < \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^n < 20$$

をみたす自然数 n は何個あるか調べよ．

(解) 不等式をみたす自然数 n は

$$\frac{10}{\log_{10}(3/2)} < n < \frac{20}{\log_{10}(3/2)}$$

である．また，与えられた関係式より

$$\begin{aligned}0.1760 =& 0.4771 - 0.3011 < \log_{10}(3/2)\\ <& 0.4772 - 0.3010 = 0.1762\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}56.75 < \frac{10}{0.1762} < \frac{10}{\log_{10}(3/2)} < \frac{10}{0.1760} < 56.82,\\ 113.50 < \frac{20}{0.1762} < \frac{20}{\log_{10}(3/2)} < \frac{20}{0.1760} < 113.64\end{aligned}$$

となる．したがって，求める個数は $113 - 56 = 57$ である． ■