■第 2 回課題問題 1 について　問題の仮定から

$$\sin 2\theta = 2\,\sin\theta\,\cos\theta = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 1 \tag{E}$$

となり，高等学校で学習した三角関数では上記の関係式をみたす θ は存在しない．三角関数は複素数 z に対して

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

と表されるので，仮定から

$$\begin{aligned}\sin 2\theta = \frac{4}{3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{2i} = \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(e^{i2\theta}\right)^2 - \frac{8\,i}{3}\,e^{i2\theta} - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{i2\theta} = \frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\,i \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\,\log\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

が得られる．つまり，(E) をみたす θ は複素数として求まる．また，すべての複素数 z に対して

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 = 1$$

であるから，

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^3 - 3\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta\,\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = 1^3 - 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 1 = -\frac{1}{3}$$

となる．