微積分 I (20591)　課題

2015.11.18

$\boxed{1}$* 　次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

$\boxed{2}$* 　次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} (2^x + 3^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x\,\log x - x + 1}{(x-1)\,\log x}$

$\boxed{3}$* 　$-1 < x < 1$ の範囲で

$$\sin^{-1} x = 2\,\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ 　$\mathbb{R}$ において定義された関数 $f(x)$ は $f(0)=0$ をみたし，導関数 $f'(x)$ および 2 階導関数 $f''(x)$ が存在し，それらが $\mathbb{R}$ において連続であるとする．このとき，すべての $x>0$ に対して $f''(x)>0$ が成り立つならば，関数 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ は $x>0$ において単調増加であることを示せ．

$\boxed{5}$ 　関数 $f(x)$ は区間 $[0,1]$ からそれ自身への連続的に微分可能（区間 $(0,1)$ において $f(x)$ の導関数が存在し，その導関数が連続である）で，すべての $x \in (0,1)$ に対して $|\,f'(x)\,| < 1$ をみたすものとする．このとき，$0 \le x \le 1$ の範囲における方程式 $f(x) = x$ の解は唯一つであることを示せ．