微積分 I (20591)　課題

2015.11.04

$\boxed{1}$* 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2} + \cdots + \frac{\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)^{n-1}} + \cdots$$

により定義するとき，$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で $f(x)$ の連続性を調べよ．

$\boxed{2}$* 関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = 1 - |\,2\,x - 1\,|, \qquad g(x) = f(x) + \frac{f(f(x))}{2}$$

により定めるとき，$0 \leq x \leq 1$ の範囲で関数 $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．

$\boxed{3}$* 3 次の整式 $f(x)$ に対して，方程式 $f(x) = 0$ が実数解 a，b，c （$a < b < c$）をもつとき，方程式 $f'(x) = 0$ は区間 (a, b) および (b, c) においてそれぞれ解をもつことを示せ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．

$\boxed{4}$ ネイピア数 $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を調べよ．

$\boxed{5}$ $a > 0$ とする．すべての $x \geq 0$ に対して $e^x \geq 1 + x$ が成り立つことを用いて，関数

$$f(x) = \begin{cases} |\,x\,|^{-a}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の連続性を調べよ．