微積分 I (20591)　課題

2014.02.05

$\boxed{1}$* 　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，$\{a_n\}$ は単調減少数列であることを示せ.

$\boxed{2}$* 　自然数 n に対して $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ とおくとき，数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して

$$\frac{a_n}{n!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{3}$* 　$0 < \alpha \leq 1$ とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ は存在しない（発散する）ことを示せ.

$\boxed{4}$ 　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ n \left(\frac{1}{5} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5} \right) \right\}$ を求めよ.

$\boxed{5}$ 　極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\,x}{2^k} \right)^2 dx$$

を求めよ.