

微積分 I (20852) 課題

2011 年 2 月 2 日

1* すべての $\alpha > 2$ に対して

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha + 1} dx < 1$$

が成り立つことを示せ.

2* 次の極限値を求めよ.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n+3k}{n^3}}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2}$$

3* 次の不等式の表す領域の面積を求めよ.

$$4x^2 + y^2 \leq 4, \quad x^2 + 4y^2 \leq 4$$

4 区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して, 不等式

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

が成り立つことを示せ.

5 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n k \sin kx \right)^2 dx$$